Temat: Pojęcie liczby zespolonej. Działania na liczbach zespolonych.

W zbiorze liczb rzeczywistych nie można wyciągać pierwiastków z liczb ujemnych.
W zbiorze liczb zespolonych można wyciągać pierwiastki z liczb ujemnych.
Pierwiastek (parzystego stopnia) z liczby ujemnej jest tzw. **liczbą urojoną** i zapisujemy go za pomocą jednostki urojonej i. Liczbę i definiujemy tak:

$$i^2=-1$$

1. Definicja liczby zespolonej

Liczbą zespoloną nazywamy liczbę postaci:

$$a+bi$$

gdzie: $a,b\in R$.

Nazewnictwo:
a - część rzeczywista liczby zespolonej
b - część urojona liczby zespolonej

Literka i - to **jednostka urojona**.

Przykład:

1. Liczba zespolona o części rzeczywistej 7 i urojonej 13, to liczba: $7+13i$.
2. Liczba zespolona o części rzeczywistej -1 i urojonej 2, to liczba: $-1+2i$.
3. Liczba zespolona o części rzeczywistej 3 i urojonej -1, to liczba: $3-i$.
4. Liczba zespolona o części rzeczywistej 0 i urojonej -4, to liczba: $-4i$.

2. Działania w zbiorze liczb zespolonych

Dodawaj liczby zespolone 3+5i oraz 7+11i.

Rozwiązanie:

Grupujemy wyrazy i dodajemy (część rzeczywistą do części rzeczywistej, część urojoną do części urojonej):

$$3+5i+7+11i=3+7+5i+11i=10+16i$$

Odejmowanie liczb zespolonych wykonujemy podobnie jak dodawanie;

4+2i – (3+3i)= 4-3 + 2i-3i = -1 -1i

Mnożenie liczb zespolonych:

Wykonaj mnożenie liczb zespolonych $(5+2i)\cdot(3-7i)$.

Rozwiązanie:

Mnożymy nawiasy metodą "wyraz za wyrazem":

$$\begin{aligned}(5+2i)\cdot(3-7i) &= 5\cdot 3-5\cdot 7i+2i\cdot 3-2i\cdot 7i= \\ &=15-35i+6i-14i^2= \\ &=15-29i-14\cdot(-1)= \\ &=15-29i+14= \\ &=29-29i\end{aligned}$$

Zauważmy, że działając na liczbach zespolonych mogliśmy bardziej uprościć wynik, korzystając z faktu: $i^2=-1$.

Przykłady upraszczania wysokich potęg liczby urojonej i:

a) $i^3 = i^2 \cdot i = -1 \cdot i = -i$

b) $i^4 = (i^2)^2 = (-1)^2 = 1$

c) $i^{14} = (i^2)^7 = (-1)^7 = -1$

d) $i^{21} = (i^2)^{10} \cdot i^1 = (-1)^{10} \cdot i = 1 \cdot i = i$

e) $i^{100} = (i^4)^{25} = 1^{25} = 1$

3. Liczba sprzężona do liczby zespolonej

Przyjmijmy, że mamy daną liczbę zespoloną $z = a + bi$.
Wówczas liczbę $a - bi$ nazywamy **liczbą sprzężoną** do z i oznaczamy symbolem $\bar{z}$.
Czyli:

$$\bar{z} = a - bi$$

Przykłady:

1. jeżeli $z = 2 + 7i$, to $\bar{z} = 2 - 7i$
2. jeżeli $z = \sqrt{3} - i$, to $\bar{z} = \sqrt{3} + i$
3. jeżeli $z = 2i$, to $\bar{z} = -2i$
4. jeżeli $z = 5i + 1$, to $\bar{z} = 1 - 5i$

Własności liczb sprzężonych:

Dla dowolnych $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ mamy:

- $z + \bar{z} = 2\,\mathrm{Re}(z)$
- $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$
- $z \cdot \bar{z} = |z|^2$

W trzecim podpunkcie pojawił się nowy symbol $|z|$, który oznacza **moduł** liczby z.
Moduł liczby zespolonej $z = a + bi$ liczymy ze wzoru:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Dzielenie liczb zespolonych

Dzielenie liczb zespolonych przez siebie polega na zapisaniu tego dzielenia w postaci ułamka oraz pomnożeniu licznika i mianownika przez sprzężenie liczby zespolonej w mianowniku. Przypomina to usuwanie niewymierności z mianownika.

Przykład:

$$(1+8i):(2+3i) = \frac{1+8i}{2+3i}\cdot\frac{2-3i}{2-3i} = \frac{(1+8i)(2-3i)}{2^2-(3i)^2} = \frac{2-3i+16i-24i^2}{4-9i^2} =$$

$$= \frac{2+13i+24}{4+9} = \frac{26+13i}{13} = \frac{26}{13}+\frac{13i}{13} = 2+i$$

$$(1+8i):(2+3i) = 2+i$$

Korzystam ze wzoru skróconego mnożenia $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ i $i^2=-1$.

Zadanie:

Wykonaj działania na liczbach zespolonych:

a) $(5+2i)+(3-9i) =$

b) $(i-3)-(2-5i) =$

c) $(i\sqrt{2}-1)\cdot(3i+2) =$

Podziel liczby zespolone.

≫ $(5-i):(3+2i)$

≫ $(10+5i):(1+2i)$

≫ $(-9-19i):(3-5i)$